Basics Of Graph Morphology

Sravan Danda

April 9, 2015

Table of contents

Why Discrete Mathematical Morphology?

Basics Of Graph Theory Graphs in Graph Morphology

Basic Operators on Graphs

Vertex Dilation and Erosion Edge Dilation and Erosion Graph Opening and Closing Graph Half-Opening and Half-Closing

Granulometries

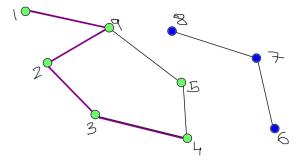
Why Discrete Mathematical Morphology?

- Superior Analysis
 - Finer Granulometries
 - Contrast Preserving Watershed Algorithms

Fast Graph based computations

Most of the material is available in [1],[3],[2]

Basics of Graphs



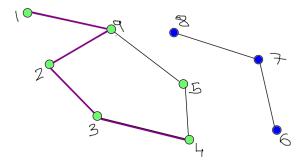


▲□▶ ▲圖▶ ▲臣▶ ▲臣▶ ―臣 … のへで



- Definition of a Graph
- Adjacency

Basics of Graphs





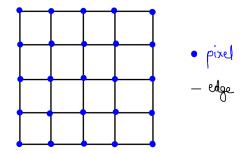
・ロト ・四ト ・ヨト ・ヨト

æ

Figure : General Graph

- Paths in a Graph
- Connected Components
- Vertex and Edge Weighted Graphs

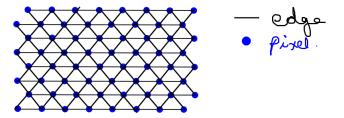
Graphs in Graph Morphology



Created by Paint X

Figure : 4 - Adjacency Graph

Graphs in Graph Morphology



Created by Paint X

◆□ > ◆□ > ◆豆 > ◆豆 > ̄豆 = のへで

Figure : 6 - Adjacency Graph

	• • - • • • •		· · - · · · ·	
•				
·				
	· · · · · ·		· · · - · - · ·	
	• • - • - • •		· · - · - · - · ·	
•	o o •_• o o		o o o <u>-</u> o o o	
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
0 0 0 0 0 0	0 0 • 0 0 0			0 0 0 0 0 0
• •-•-• • •	• • • • • •			• •-•-• • •
0-0-0-0 0 0	•-•-• • •			•-•-• • •
0 0 0 0-0-0	· · · · · ·			· · · · - · - ·
	· · • • • ·			· · • • • ·
· · - · - · - · - ·	· •-•-•-•			· •-•-•-•
0-0-0-0-0	•-•-•-•-•	0 0 •—• 0 0	o o •—• o o	•-•-•-•-•
• •-•-• •	• •-•-• •			• •-•-• •
f: $\delta^{\times}(X^{\bullet})$	g: $[\delta, \Delta](X)$	h: $[\epsilon, \mathcal{E}](X)$	i: $\alpha_3(X)$	j: $\beta_3(X)$

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\delta^{\bullet}(X^{\times}) = \left\{ x \in \mathbb{G}^{\bullet} \mid \exists e_{x,y} \in X^{\times} \right\}$$

P-P-P-P-P				
	· · - · · · ·		• • <u> </u>	
	0 0 0 0 • 0			
	0 0 0 0 0 0			0 0 0 0 0 0
	· · · · · ·		· · · · · · · · · ·	
	• • – • – • •		• •-•-• •	
	o o •—• o o	0 0 • • 0 0	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
				0 0 0 0 0
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
0 0 0 0 0 0	0 0 • 0 0 0			· · · · · ·
• • • • • • •	• • • • • •			• •-•-• • • •
	•-•-• • •		0 0 0 0 0 0	•-•-• • •
o o o o o-o-o	• • • • • •		0 0 0 0 0 0	· · · · · · · ·
	° ° • • • °			· · · · · ·
• •-•-•-•	• •-•-•-•-•			• •-•-•-•
0-0-0-0-0-0	•-•-•-•-•	o o •—• o o	o o •—• o o	•-•-•-•
• • <u>- • - •</u> • •	• •-•-• •			• •-•-• •
f: $\delta^{\times}(X^{\bullet})$	g: $[\delta, \Delta](X)$	h: $[\epsilon, \mathcal{E}](X)$	i: $\alpha_3(X)$	j: $\beta_3(X)$

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\epsilon^{ imes}(X^{ullet}) = \left\{ e_{x,y} \in \mathbb{G}^{ imes} \mid x \in X^{ullet} ext{ and } y \in X^{ullet}
ight\}$$

	• • • • • • • •		· · - · · · ·	
	· · · · · · ·		· · · · · · · · ·	
	• •-•-• •		· · - · - · · · ·	
	· · · · · · · ·		0 0 0 0 0 0 0	
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
0 0 0 0 0 0	0 0 • 0 0 0		0 0 0 0 0 0	0 0 • 0 0 0
· · · · · · · ·	• • • • • • •			• •-•-• • • •
0-0-0-0 0 0	•-•-• • •		0 0 0 0 0 0	•-•-• • •
0 0 0 0-0-0	• • • • • •		0 0 0 0 0 0	· · · · - • - •
0 0 0 0 0 0	• • • • • •			
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· •-•-•-•			· •-•-•-•
0-0-0-0-0	•	o o •—• o o	o o •—• o o	•
· · - · - · · ·	• •-•-• •			• •-•-• •
0 0 0 0 0 0				
f: $\delta^{\times}(X^{\bullet})$	g: $[\delta, \Delta](X)$	h: $[\epsilon, \mathcal{E}](X)$	i: $\alpha_3(X)$	j: $\beta_3(X)$

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\epsilon^{\bullet}(X^{\times}) = \left\{ x \in \mathbb{G}^{\bullet} \mid \forall e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times}, e_{x,y} \in X^{\times} \right\}$$

	• • • • • • • •		· · - · · · ·	
	· · · · · · ·		· · · · · · · · ·	
	• •-•-• •		· · - · - · · · ·	
	· · · · · · · ·		0 0 0 0 0 0 0	
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
0 0 0 0 0 0	0 0 • 0 0 0		0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0
· · · · · · · ·	• • • • • • •			• •-•-• • • •
0-0-0-0 0 0	•-•-• • •		0 0 0 0 0 0	•-•-• • •
0 0 0 0-0-0	• • • • • •		0 0 0 0 0 0	· · · · - • - •
0 0 0 0 0 0	• • • • • •			
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· •-•-•-•			· •-•-•-•
0-0-0-0-0	•	o o •—• o o	o o •—• o o	•
· · - · - · · ·	• •-•-• •			· · · · · · · · ·
0 0 0 0 0 0				
f: $\delta^{\times}(X^{\bullet})$	g: $[\delta, \Delta](X)$	h: $[\epsilon, \mathcal{E}](X)$	i: $\alpha_3(X)$	j: $\beta_3(X)$

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\delta^{\times}(X^{ullet}) = \left\{ e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \mid x \in X^{ullet} \text{ or } y \in X^{ullet}
ight\}$$

Vertex Dilation and Erosion

Definition

We define the notion of **vertex dilation**, δ and **vertex erosion**, ϵ as, $\delta = \delta^{\bullet} \circ \delta^{\times}$ and $\epsilon = \epsilon^{\bullet} \circ \epsilon^{\times}$. These are equivalent to, for any $X^{\bullet} \in \mathbb{G}^{\bullet}$

$$\begin{split} \delta(X^{\bullet}) &= \left\{ x \in \mathbb{G}^{\bullet} \mid \exists e_{x,y} \in X^{\times}, \ e_{x,y} \cap X^{\bullet} \neq \phi \right\} \\ \epsilon(X^{\bullet}) &= \left\{ x \in \mathbb{G}^{\bullet} \mid \forall e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times}, \ x, y \in X^{\bullet} \right\} \end{split}$$

Edge Dilation and Erosion

Definition

We define the notion of edge dilation, Δ and edge erosion, \mathcal{E} as, $\Delta = \delta^{\times} \circ \delta^{\bullet}$ and $\mathcal{E} = \epsilon^{\times} \circ \epsilon^{\bullet}$. These are equivalent to, for any $X^{\times} \in \mathbb{G}^{\bullet}$

$$\begin{array}{lll} \Delta(X^{\times}) &=& \left\{ e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \mid \text{ either } \exists e_{x,z} \in X^{\times} \text{ or } e_{y,w} \in X^{\times} \right\} \\ \mathcal{E}(X^{\times}) &=& \left\{ e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \mid \forall e_{x,z} \; e_{y,w} \in \mathbb{G}^{\times}, \; e_{x,z} \in X^{\times}, \; e_{y,w} \in X^{\times} \right\} \end{array}$$

Vertex Dilation

9-9-9-9-9-9			0 0 0 0 0 0	
	• • • • • • • •		· · - · · · ·	
	· · · · · · · ·			
	· · · · · · · · · ·			
·		0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
0 0 0 0 0 0				• • • • • •
· · · · · · · · ·	0 0 • 0 0 0 0 • • • 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	• • • • • • • • • • • •
• •• • •	• • • • • •		0 0 0 0 0	• •-•-• • •
• • <u>-</u> • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •			• • - • - • • •

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\delta(X^{\bullet}) = \left\{ x \in \mathbb{G}^{\bullet} \mid \exists e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times}, \ e_{x,y} \cap X^{\bullet} \neq \phi \right\}$$

◆□ ▶ < 圖 ▶ < 圖 ▶ < 圖 ▶ < 圖 • 의 Q @</p>

Edge Dilation

<u>7 7 7 7 7 7 7</u>				
	· · - · · · · ·		· · _ · · · · ·	
	· · · · · · ·			
	· • • • • • • •			
	· · · · · · · ·		· · · · · · · · ·	
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
· · · · · · ·	0 0 • 0 0 0 0 • • • 0 0		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	· · · · · · · ·
• • <u></u> • • •	• • • • • •		0 0 0 0 0	• • - • • • •
	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		• • - • - • • • •
		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		
		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		
		0 0		
		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0		

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\Delta(X^{\times}) = \left\{ e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \mid \text{ either } \exists e_{x,z} \in X^{\times} \text{ or } e_{y,w} \in X^{\times} \right\}$$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E) の(の)

Vertex Erosion

<u></u>				
	· · - · · · ·		0 0 - 0 0 0 0	
				0 0 0 0 0
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
	• • • • • • •		· · · · · · · · ·	
	• •-•-• •		· · - · - · - · · ·	
	o o •_• o o		0 0 0 - 0 0 0	0 0 0 0 0 0
	0 0 0 0 0 0		0 0 0 0 0 0	
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
0 0 0 0 0 0	0 0 • 0 0 0		0 0 0 0 0 0	· · · · · ·
• • <u>-</u> • • • •	• • • • • •			• •-•-• • •
0-0-0 0 0	•-•-• • •		0 0 0 0 0 0	•-•-• • •
o o o o—o—o	• • • • • •		0 0 0 0 0 0	· · · · - · - ·
0 0 0 0 0 0	· · · · · ·		0 0 0 0 0 0	• • • • • •
· · - · - · - · - ·	· •-•-•-•			· •-•-•-•
·	•-+-+-+-+-+	o o •—• o o	o o •—• o o	•
• •-•-• •	• •-•-• •	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	• •-•-• •

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\epsilon(X^{ullet}) = \left\{ x \in \mathbb{G}^{ullet} \mid orall e_{x,y} \in \mathbb{G}^{ imes}, \; x,y \in X^{ullet}
ight\}$$

◆□ ▶ < 圖 ▶ < 圖 ▶ < 圖 ▶ < 圖 • 의 Q @</p>

Edge Erosion

<u>1-1-1-1-1-1</u>				
	· · - · · · · ·		• • <u> </u>	
				0 0 0 0 0 0
	· · · · · ·		· · · · · · · · ·	
	• •-•-• •		• •-•-• •	
	0 0 •-• 0 0	0 0 • • 0 0		
		0 0 0 0 0 0		
a: G	b: $X = (X^{\bullet}, X^{\times})$	c: $\delta^{\bullet}(X^{\times})$	d: $\epsilon^{\times}(X^{\bullet})$	e: $\epsilon^{\bullet}(X^{\times})$
u. o	0. 11 = (11 , 11)	C. U (A)	u. c (m)	0.0(11)
	5. H = (H ,H)	0.0 (A	u. c (11)	0.0 (11)
• • • • • • •	0 0 • 0 0 0	0 0 0 0 0 0		· · · · · · ·
• • • • • •				
• • • • • • • •		000000	0 0 0 0 0 0	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
			0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	

Figure : Graph Dilation And Erosion

$$\mathcal{E}(X^{\times}) = \left\{ e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \mid \forall e_{x,z} \ e_{y,w} \in \mathbb{G}^{\times}, \ e_{x,z} \in X^{\times}, \ e_{y,w} \in X^{\times} \right\}$$

Graph Opening and Closing

Definition

We denote opening and closing on vertices by γ_1 , and ϕ_1 , opening and closing on edges by Γ_1 , and Φ_1 , and opening and closing on graphs by $[\gamma, \Gamma]_1$ and $[\phi, \Phi]_1$.

- 1. We define γ_1 and ϕ_1 as $\gamma_1 = \delta \circ \epsilon$ and $\phi_1 = \epsilon \circ \delta$
- 2. We define Γ_1 and Φ_1 as $\Gamma_1 = \Delta \circ \mathcal{E}$ and $\Phi_1 = \mathcal{E} \circ \Delta$
- 3. we deine $[\gamma, \Gamma]_1$ and $[\phi, \Phi]_1$ by $[\gamma, \Gamma]_1 = (\gamma_1(X^{\bullet}), \Gamma_1(X^{\times}))$ and $[\phi, \Phi]_1 = (\phi_1(X^{\bullet}), \Phi_1(X^{\times}))$.

Graph Half-Opening and Half-Closing

Definition

We denote half-opening and half-closing on vertices by $\gamma_{1/2}$ and $\phi_{1/2}$, half-opening and half-closing on edges by $\Gamma_{1/2}$, and $\Phi_{1/2}$, and half-opening and half-closing on graphs by $[\gamma, \Gamma]_{1/2}$ and $[\phi, \Phi]_{1/2}$.

- 1. We define $\gamma_{1/2}$ and $\phi_{1/2}$ as $\gamma_{1/2} = \delta^{\bullet} \circ \epsilon^{\times}$ and $\phi_{1/2} = \epsilon^{\bullet} \circ \delta^{\times}$
- 2. We define $\Gamma_{1/2}$ and $\Phi_{1/2}$ as $\Gamma_{1/2} = \delta^{\times} \circ \epsilon^{\bullet}$ and $\Phi_{1/2} = \epsilon^{\times} \circ \delta^{\bullet}$

3. we deine
$$[\gamma, \Gamma]_{1/2}$$
 and $[\phi, \Phi]_{1/2}$ by
 $[\gamma, \Gamma]_{1/2} = (\gamma_{1/2}(X^{\bullet}), \Gamma_{1/2}(X^{\times}))$ and
 $[\phi, \Phi]_{1/2} = (\phi_{1/2}(X^{\bullet}), \Phi_{1/2}(X^{\times})).$

Graph Opening and Half-Opening

0	0	0	0	0	0	0	0	0	С	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	•	0	0	0	0	0	c	С	0	•	0	0	0	0	0		0	0	•	0	0	0	0	0
0	• -	-•	-•-	-•	0	0	0	0	c	•	•	•	0	0	0	0		0	•-	- • -	-•	•	0	0	0
0	0	·	0	ł	0	0	0	c	c	0	•	0	0	0	0	0		0	0	•	0	•	0	0	0
0	0	•	0	+-	-•	0	0	0	c	0	0	0	•	•	0	0		0	0	•	0	•	•	0	0
0	0	ł	• -	-•	-+-	-•	0		с	0	0	• -	-•	-•	-•	0		0	0	•	• -	-•-	-•	-•	0
0	• -	-•	0	ŀ	ŀ	0	0	0	c	0	0	0	•	ŀ	0	0		0	•	•	0	ŀ	ŀ	0	0
0	•	•	0	0	0	0	0	c	þ	0	0	0	0	0	0	0		0	•	•	0	0	0	0	0
0	•	0	0	•	0	0	0	c	c	0	0	0	0	0	0	0		0	•	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	c	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
a: Y											b:	$[\gamma,]$	$[]_1$	(Y)			c: $\left[\gamma,\Gamma\right]_{1/2}(Y)$								

Figure : Graph Opening and Half-Opening

►
$$\gamma_{1/2}(X^{\bullet}) = \{x \in X^{\bullet} \mid \exists e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \text{ with } y \in X^{\bullet}\}$$

► $\Gamma_{1/2}(Y^{\times}) = \{u \in G^{\times} \mid \exists x \in u \text{ with } \{e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times}\} \in Y \times\}$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Graph Closing and Half-Closing

																					-			
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	•-	-•-	-•	0	0		0	0	0	•-	-•-	-•	0	0	0	0	0	•-	-•-	-•	0	0
0	0	0	ł	0	ł	0	0		0	0	•	+-	-+-	-+	0	0	0	0	0	ł	•	ł	0	0
0	• -	-•	•	•-	-+	0	0		0	• -	-•-	-+-	-•-	-+	0	0	0	• -	-•	•	• -	-	0	0
0	0	0	•	0	•	0	0		0	0	•	ł	•	+	0	0	0	0	0	•	0	ł	0	0
0	0	0	ł	0	•	0	0		0	0	•	ł	•	ł	0	0	0	0	0	ł	0	•	0	0
0	•	0	•-	-•-	-•	0	0		0	•	•	•-	-•-	-•	0	0	0	•	0	•-	-•-	-•	0	0
0	0	0	•	0	0	0	0		0	0	0	•	0	0	0	0	0	0	0	•	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	, I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e: Z											f: [ϕ, q	$[p]_1$	(Z)				Ę	g: [ç	ϕ, Φ	$]_{1/2}$	(Z)	

Figure : Graph Closing and Half-Closing

▶
$$\phi_{1/2}(X^{\bullet}) = \{x \in X^{\bullet} \mid \forall e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \text{ either } x \in X^{\bullet} \text{ or } y \in X^{\bullet}\}$$

▶ $\Phi_{1/2}(Y^{\times}) = \{e_{x,y} \in \mathbb{G}^{\times} \mid \exists e_{x,z} \in Y^{\times} \text{ and } \exists e_{y,w} \in Y^{\times}\}$

Granulometries

Definition

We define:

•
$$[\gamma, \Gamma]_{\lambda/2} = [\delta, \Delta]^i \circ [\gamma, \Gamma]_{1/2}^j \circ [\epsilon, \mathcal{E}]^i$$
 where $i = \lfloor \lambda/2 \rfloor$ and $j = \lambda - 2 \times \lfloor \lambda/2 \rfloor$

•
$$[\phi, \Phi]_{\lambda/2} = [\epsilon, \mathcal{E}]^i \circ [\phi, \Phi]_{1/2}^j \circ [\delta, \Delta]^i$$
, where $i = \lfloor \lambda/2 \rfloor$ and $j = \lambda - 2 \times \lfloor \lambda/2 \rfloor$

Granulometries

Theorem

The families $\{ [\gamma, \Gamma]_{\lambda/2} \mid \lambda \in \mathbb{B} \}$ and $\{ [\phi, \Phi]_{\lambda/2} \mid \lambda \in \mathbb{B} \}$ are granulometries:

- ▶ for any $\lambda \in \mathbb{N}$, $[\gamma, \Gamma]_{\lambda/2}$ is an opening and $[\phi, \Phi]_{\lambda/2}$ is a closing.
- ▶ for any two elements $\lambda \leq \mu$, we have $[\gamma, \Gamma]_{\lambda/2}(X) \supseteq [\gamma, \Gamma]_{\mu/2}$ and $[\phi, \Phi]_{\lambda/2} \subseteq [\phi, \Phi]_{\mu/2}$ where \supseteq and \subseteq are graph comparisons.

References

Jean Cousty, Laurent Najman, Fabio Dias, and Jean Serra. Morphological filtering on graphs. *Computer Vision and Image Understanding*, 117(4):370 – 385, 2013.

Special issue on Discrete Geometry for Computer Imagery.

R. Diestel.

Graph Theory.

Electronic library of mathematics. Springer, 2006.

Pierre Soille.

Morphological Image Analysis: Principles and Applications. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2 edition, 2003.